conférences
éducation
évènements
la médiation scientifique
ateliers
animations
formation
exposés

Itinéraire de visite

Les mathématiques du XXe siècle

Tous publics de culture scientifique et technique à partir des classes de 1res

Temps de visite : 1 heure 30

Cet itinéraire de visite dans l'exposition MATHÉMATIQUES (niveau 1) offre l'occasion d'expérimenter quelques-unes des théories mathématiques élaborées au cours du XXe siècle.

Le parcours s'articule autour des idées directrices suivantes :

- Modéliser des phénomènes complexes et des structures irrégulières.
- Calculer et prévoir en présence du hasard ou du chaos. On constatera les liens étroits unissant hasard, chaos et géométrie fractale. Par exemple les structures fractales des attracteurs générés par le chaos.
- Expérimenter quelques théories récentes (chaos, fractal, mouvement brownien).
- Découvrir les mathématiques dans leurs aspects appliqués (modélisation).
- Découvrir le métier de mathématicien à travers quelques interviews.

conférences
éducation
évènements
la médiation scientifique
ateliers
animations
formation
exposés

Itinéraire de visite

Les mathématiques du XX^{e} siècle

« Mouvement brownien » dans l'exposition « Mathématiques ». © Nicolas Breton-CSI

Le questionnaire

Ce parcours offre l'occasion d'expérimenter quelques-unes des théories mathématiques élaborées au cours du XXe siècle.

L'esprit des mathématiques

Le village des mathématiciens (Audiovisuel)

1. Quel est le nombre de mathématiciennes et de mathématiciens en activité aujourd'hui ? Combien étaient-ils, il y a 50 ans ?

2. Peut-on exercer l'activité de chercheur mathématicien en solitaire ?

3. Les mathématiciens parlent de leur métier. Quels témoignages retenez-vous ?

La modélisation (Salle audiovisuelle)

4. Citez quelques exemples d'utilisation de la modélisation mathématique.

5. En quoi consiste la modélisation mathématique ?

6. Pourquoi est-elle si utile de nos jours ?

7. Quel est l'instrument indispensable pour mener à bien ces modélisations et pourquoi ne peut-on s'en passer ?

<u>Espace probabilités et statistiques</u>
En 1827, le botaniste Robert Brown constate, derrière son microscope, les mouvements continuels et désordonnés des grains de pollen dispersés dans une goutte de liquide. Ce mouvement dit “brownien” est expliqué à la fin du XIX^{e} siècle par l’agitation thermique des molécules, cause des chocs avec les grains de pollens. L’analyse mathématique de ce mouvement est réalisée par Einstein et Wiener au début du XX^{e} siècle. Cette théorie sert aujourd’hui de modèle mathématique pour comprendre d’autres situations aléatoires.

Complexité et prédiction

Mouvement brownien (Dispositif expérimental montrant un mouvement imprédictible))

8. Pourquoi le palet se déplace-t-il ?

9. Comment caractériser la trajectoire du palet ? Quelle analogie établir entre la trajectoire du palet et celles des molécules d’un gaz ? Les réponses figurent dans le texte du panneau.

Complexité et prédiction (Audiovisuel sur le hasard et l’analyse de la complexité)

10. Quand parle-t-on de hasard ? Citez quelques phénomènes où le hasard se manifeste.

11. Peut-on conduire des calculs précis en présence du hasard ? Vous pouvez utiliser la désintégration de l’atome d’uranium pour argumenter votre réponse.

12. Quelles informations peut-on obtenir d’un sondage effectué sur 1000 personnes choisies au hasard ? Pouvez-vous expliciter la réponse donnée dans le film ?

13. Un joueur du loto dispose d'une chance sur 13 983 816 de trouver les 6 bons numéros d'un tirage. Quelle formule permet d'obtenir ce résultat ?

14. Quelles sont les deux attitudes des savants concernant le hasard ? (Citez notamment la position d'Einstein.)

Espace chaos
Au début du XX^{e} siècle, le mathématicien Henri Poincaré met en évidence les phénomènes chaotiques en étudiant la stabilité du système solaire. Ces phénomènes se caractérisent par l'extrême sensibilité aux conditions initiales, qui rend toute prévision à long terme impossible, même en présence d'une description mathématique rigoureuse.

Chaoteur (Pendule interactif)[1]

15. Comment fonctionne ce dispositif expérimental ?

16. Après avoir réalisé deux trajectoires, que constatez-vous ?

Chaos (Livre sonore sur le concept de chaos déterministe)

17. Sélectionnez le titre De l'ordre au chaos. Que constate-t-on lors du passage du comportement régulier de la bille à un comportement chaotique ?

18. Comment provoque-t-on ce phénomène ?

19. Sélectionnez le titre « Chaos, météo et prévisions ». À quoi attribue-t-on l'incertitude des prévisions météorologiques ? Comment en vérifie-t-on la fiabilité ?

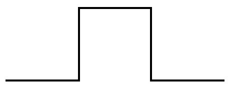
[1] Au moment de l'actualisation de ce document, l'élément « Chaoteur » est en cours de restauration et donc absent de l'exposition pour une durée indéterminée.

Espace fractales

Les phénomènes chaotiques font apparaître, au sein du désordre qu'ils génèrent, des structures ordonnées à caractère fractal, en répétant les mêmes irrégularités à des échelles inférieures. C'est le cas lors de la diffusion d'un fluide dans un autre, abordé précédemment dans l'audiovisuel "Complexité & prédiction".

Dimension fractale (Vitrine et panneau)

Étape 0



Étape 1

Étape 2

Construction d'une courbe fractale.

20. Construction d'une courbe fractale (figures ci-contre) : un segment est découpé en 3 parties égales. On remplace le segment central par un carré dont les côtés ont pour longueur le segment central remplacé. Grâce aux explications du panneau, dessinez la figure fractale correspondant à l'étape 2.

21. Pour cette courbe, donnez les valeurs E et N de la formule : $E^d = N$, permettant le calcul de la dimension fractale "d" de la courbe. (Pour les terminales, calculer la dimension fractale "d" à 10^{-2} près.)

22. Si le segment de l'étape 0 vaut 1, quelle est la longueur de la courbe…

À l'étape 2 :

À l'étape 3 :

À l'étape n (n entier naturel) :

23. Que peut-on dire de la longueur de la courbe lorsque n tend vers l'infini ?

***Faire des fractales**, c'est simple !* **Créer votre propre courbe fractale.**

À partir d'un motif de base que vous choisirez, tentez de nous présenter votre courbe fractale.

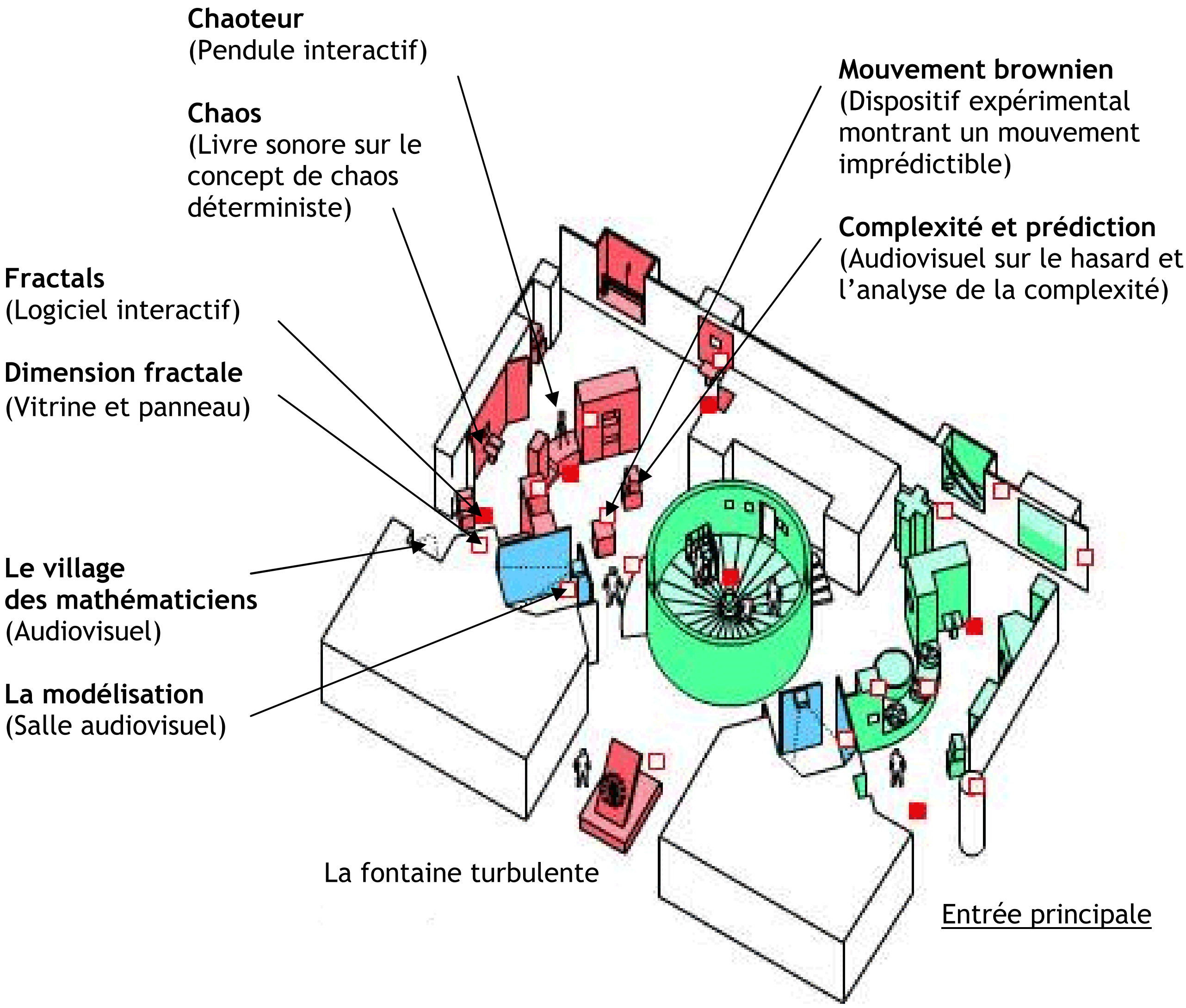
Fractales (Logiciel interactif)

24. Sélectionnez la rubrique 1 : *Qu'est-ce que la géométrie fractale ?* Que permet la géométrie fractale par rapport à la géométrie classique ?

25. Quelle est la signification de l'expression utilisée dans le commentaire : Invariance par changement d'échelle ?

LE PLAN DE L'EXPO

Exposition MATHÉMATIQUES (niveau 1)



Légende

- Géométries, nombres et mouvements
- Complexité et prédiction
- L'esprit des mathématiques

conférences
éducation
évènements
la médiation scientifique
ateliers
animations
formation
exposés

Itinéraire de visite

Les mathématiques du XX^{e} siècle

La « Fontaine turbulente » est une illustration des phénomènes chaotiques. © CSI-S. Chivet

Les réponses

L’esprit des mathématiques

Le village des mathématiciens (Audiovisuel)

1. Quel est le nombre de mathématiciennes et de mathématiciens en activité aujourd’hui ? Combien étaient-ils il y a 50 ans ?

   Ils sont environ 100 000 membres aujourd’hui. On en comptait 2 000 il y a 50 ans.

2. Peut-on exercer l’activité de chercheur mathématicien en solitaire ?

   Non, car la recherche en mathématique impose une collaboration active entre les chercheurs.

3. Les mathématiciens parlent de leur métier. Quels témoignages retenez-vous ?

   Les mathématiciens interviewés évoquent notamment l’idée du beau qui guide leur intuition, ainsi que l’aspect obsessionnel de leur démarche face aux problèmes mathématiques auxquels ils sont confrontés.

La modélisation (Salle audiovisuelle)

4. Citez quelques exemples d’utilisation de la modélisation mathématique.

   On modélise la rentrée d’une navette spatiale, le choc frontal d’une automobile, l’écoulement de l’air sur une aile d’avion, une tornade, la résistance d’une structure en béton, comme une tour aéroréfrigérante (photo ci-contre), etc.

5. En quoi consiste la modélisation mathématique ?

   La modélisation consiste à représenter le comportement d’un phénomène à l’aide d’un système d’équations, après avoir défini les paramètres déterminants de l’évolution du phénomène.

6. Pourquoi est-elle si utile de nos jours ?

   Elle permet des simulations sur ordinateur, évitant de coûteuses expériences grandeur nature.

7. Quel est l’instrument indispensable pour mener à bien ces modélisations et pourquoi ne peut-on s’en passer ?

   L’ordinateur est l’instrument indispensable pour exploiter ces modélisations. Seule sa puissance de calcul permet de résoudre les équations modélisant les phénomènes étudiés.

Espace probabilités et statistiques
En 1827, le botaniste Robert Brown constate, derrière son microscope, les mouvements continuels et désordonnés des grains de pollen dispersés dans une goutte de liquide. Ce mouvement dit “brownien” est expliqué à la fin du XIX^{e} siècle par l’agitation thermique des molécules, cause des chocs avec les grains de pollens. L’analyse mathématique de ce mouvement est réalisée par Einstein et Wiener au début du XX^{e} siècle. Cette théorie sert aujourd’hui de modèle mathématique pour comprendre d’autres situations aléatoires.

Complexité et prédiction

Mouvement brownien (Dispositif expérimental montrant un mouvement imprédictible))

8. Pourquoi le palet se déplace-t-il ?

   Les billes d’acier sont agitées au hasard dans toutes les directions et provoquent le déplacement aléatoire du palet.

9. Comment caractériser la trajectoire du palet ? Quelle analogie établir entre la trajectoire du palet et celles des molécules d’un gaz ?

   La trajectoire du palet est imprévisible. Elle modélise le mouvement désordonné des molécules d’un gaz sous l’effet de l’agitation thermique, à l’origine du mouvement dit «brownien».

Complexité et prédiction (Audiovisuel sur le hasard et l’analyse de la complexité)

10. Quand parle-t-on de hasard ? Citez quelques phénomènes où le hasard se manifeste.

    On parle de hasard lorsque l’on est incapable de faire un choix raisonné ou de pronostiquer un futur. L’incertitude résulte de la complexité d’un mouvement impossible à calculer ou de la trop grande sensibilité aux conditions de départ. Le hasard se manifeste dans des phénomènes variés : météorologie, désintégration d’un atome, poker, loto, etc.

11. Peut-on conduire des calculs précis en présence du hasard ? Vous pouvez utiliser la désintégration de l’atome d’uranium pour argumenter votre réponse.

    Lorsqu’un phénomène se manifeste où le hasard est présent, il est parfois possible d’établir des lois probabilistes rigoureuses. Prenons l’exemple de l’atome d’uranium. On ne peut prévoir l’instant de sa désintégration, mais si l’on considère un grand nombre de ces atomes, statistiquement, la moitié d’entre eux se seront désintégrés au bout de 4,5 milliards d’années. C’est la durée de demi-vie de l’atome d’uranium, utilisé pour dater des roches très anciennes. Autre exemple : On sait calculer précisément la quantité d’uranium nécessaire pour engendrer une réaction en chaîne, appelée “masse critique”, nécessaire à la réalisation d’une bombe atomique.

12. **Quelles informations peut-on obtenir d'un sondage effectué sur 1000 personnes choisies au hasard ? Pouvez-vous expliciter la réponse donnée dans le film ?**

Un sondage effectué sur 1000 personnes choisies au hasard donne un résultat exact 9 fois sur 10, à 3 % près. La réponse finale sera dans l'intervalle : [m - 0,03 x m ; m + 0,03 x m] (m est la valeur prévue par le sondage).

13. **Un joueur du loto dispose d'une chance sur 13 983 816 de trouver les 6 bons numéros d'un tirage. Quelle formule permet d'obtenir ce résultat ?**

On dispose de C_{49}^{6} = 13 983 816 combinaisons de 6 numéros, à choisir parmi les 49 de la grille, d'où environ 1 chance sur 14 millions de gagner le gros lot !

14. **Quelles sont les deux attitudes des savants concernant le hasard ? (Citez notamment la position d'Einstein.)**

Les savants se positionnent généralement selon deux attitudes :
1) Ils considèrent que le hasard est une donnée inhérente aux lois de la nature.
2) Ils considèrent que le hasard est dû à notre connaissance incomplète de ces lois. Le représentant le plus illustre de cette deuxième version est Einstein. Face au développement de la mécanique quantique, l'une des branches de la physique qui laisse au hasard une place de choix, Einstein répondait : “Dieu ne joue pas aux dés”.

Espace chaos
Au début du XXe siècle, le mathématicien Henri Poincaré met en évidence les phénomènes chaotiques en étudiant la stabilité du système solaire. Ces phénomènes se caractérisent par l'extrême sensibilité aux conditions initiales, qui rend toute prévision à long terme impossible, même en présence d'une description mathématique rigoureuse.

Chaoteur (Pendule interactif)[2]

15. Comment fonctionne ce dispositif expérimental ?

    À partir d'une position de départ, on lâche un pendule qui évolue dans le champ magnétique résultant de la disposition de trois aimants disposés en triangle équilatéral. La trajectoire de ce pendule est reproduite sur un écran. On peut y superposer plusieurs trajectoires.

16. Après avoir réalisé deux trajectoires, que constatez-vous ?

    Au début, les trajectoires suivent le même chemin. Très rapidement, elles se séparent et chacune suit un chemin singulier.

17. Sélectionnez le titre De l'ordre au chaos. Que constate-t-on lors du passage du comportement régulier de la bille à un comportement chaotique ?

    La position de la bille devient imprévisible. Dans son comportement régulier, la courbe qui symbolise la position de la bille, en fonction de son altitude, présente une forme ovale. On est en présence d'un attracteur (se reporter à la page 2 du livre sonore pour une définition précise de la notion d'attracteur). Dans sa phase chaotique, cet attracteur disparaît et une courbe irrégulière le remplace.

18. Comment provoque-t-on ce phénomène ?

    Ce phénomène est induit par un changement infime de la valeur du paramètre de forçage du dispositif. Le forçage est le mouvement de balancement régulier que l'on impose au dispositif pour maintenir le mouvement de la bille.

19. Sélectionnez le titre « Chaos, météo et prévisions ». À quoi attribue-t-on l'incertitude des prévisions météorologiques ? Comment en vérifie-t-on la fiabilité ?

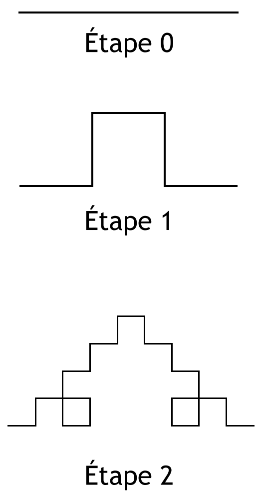
    Les phénomènes météorologiques sont chaotiques, donc sensibles à la précision des données initiales recueillies par les instruments de mesures. L'incertitude sur ces données rend donc impossible la prévision d'évolution à long terme de l'état météorologique. Les prévisions s'effectuent à partir d'un modèle mathématique avec lequel on réalise 4 simulations. Les conditions de départ sont à chaque fois légèrement modifiées. Si les quatre prévisions obtenues sont assez semblables, l'état météorologique possède la stabilité suffisante pour assurer une bonne fiabilité de la prévision. Sinon, l'instabilité de l'état météorologique ne permet pas une prévision fiable.

[2] Au moment de l'actualisation de ce document, l'élément « Chaoteur » est en cours de restauration et donc absent de l'exposition pour une durée indéterminée.

Espace fractales

Les phénomènes chaotiques font apparaître, au sein du désordre qu'ils génèrent, des structures ordonnées à caractère fractal, en répétant les mêmes irrégularités à des échelles inférieures. C'est le cas lors de la diffusion d'un fluide dans un autre, abordé précédemment dans l'audiovisuel "Complexité & prédiction".

Dimension fractale (Vitrine et panneau)



Construction d'une courbe fractale.

20. Construction d'une courbe fractale (figures ci-contre) : un segment est découpé en 3 parties égales. On remplace le segment central par un carré dont les côtés ont pour longueur le segment central remplacé. Grâce aux explications du panneau, dessinez la figure fractale correspondant à l'étape 2.

21. Pour cette courbe, donnez les valeurs E et N de la formule : $E^d = N$, permettant le calcul de la dimension fractale "d" de la courbe. (Pour les terminales, calculer la dimension fractale "d" à 10^{-2} près.)

D'une étape à l'autre, on utilise cinq segments dont la longueur est égale au tiers des segments de la figure de l'étape précédente. Soit d, la dimension de la figure fractale. On a alors la relation : $3^d = 5$, (pour les terminales) d'où l'on déduit : $d = \ln(5) / \ln(3) \approx 1{,}46$.

22. Si le segment de l'étape 0 vaut 1, quelle est la longueur de la courbe…

À l'étape 1 : 5/3

À l'étape 2 : 25/9

À l'étape n (n entier naturel) : $5^n/3^n$

23. Que peut-on dire de la longueur de la courbe lorsque n tend vers l'infini ?

Lorsque n tend vers l'infini, la longueur de la courbe tend vers l'infini. En effet, les longueurs constituent une suite géométrique dont la raison 5/3 est strictement supérieure à 1.

Fractals (Logiciel interactif)

24. Sélectionnez la rubrique 1 : *Qu'est-ce que la géométrie fractale ?* Que permet la géométrie fractale par rapport à la géométrie classique ?

La géométrie classique s'est révélée incapable de décrire ou d'aider à penser des objets naturels rugueux ou fragmentés, tels un relief montagneux ou un arbre. La géométrie fractale, introduite vers 1960 par Mandelbrot, permet l'étude d'objets fragmentés présentant une invariance par changement d'échelle. Elle est utilisée pour imiter de manière assez précise des objets tels que des nuages, des coraux, des alvéoles pulmonaires ou pour étudier des signaux fonctionnels comme ceux d'un électrocardiogramme. La structure chaotique de ces signaux peut être étudiée par des courbes fractales. Le calcul de leurs dimensions fractales permet de quantifier la pathologie cardiaque.

25. Quelle est la signification de l'expression utilisée dans le commentaire : Invariance par changement d'échelle ?

En grossissant n'importe quelle partie de l'objet fractal, on retrouve une forme de structure similaire à la structure globale de l'objet. Le tout est dans chacune de ses parties.